



ANALYSIS · INTEGRALRECHNUNG

Integral berechnen in 3 Schritten.

Ein bestimmtes Integral ist die Fläche unter einer Kurve, solange die Kurve nicht unter der x -Achse liegt. Mit drei Schritten rechnest du es aus: Stammfunktion bilden, Grenzen einsetzen, abziehen.

MERKE

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

F ist eine Stammfunktion: $F'(x) = f(x)$

Potenzregel: $x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$ für $n \neq -1$

Immer oben minus unten.

Beispiel: $\int_1^3 2x dx$

1 Stammfunktion bilden

Exponent plus 1, dann durch den neuen Exponenten teilen: $2x = 2x^1 \rightarrow 2 \cdot \frac{x^2}{2} = x^2$. Also

$$F(x) = x^2.$$

Probe durch Ableiten: $(x^2)' = 2x$. Passt!

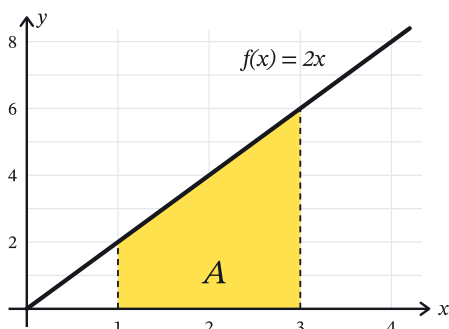
2 Grenzen einsetzen

$$[x^2]_1^3 = F(3) - F(1) \text{ mit } F(3) = 3^2 = 9 \text{ und } F(1) = 1^2 = 1.$$

Einsetzen in F , nicht in f !

3 Abziehen

Oben minus unten: $9 - 1 = 8$. Die Fläche unter der Kurve ist **8 Flächeneinheiten**.



PROBE

Die Fläche ist ein Trapez mit den parallelen Seiten $a = f(1) = 2$ und $c = f(3) = 6$ und der Höhe $h = 2$:

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{2+6}{2} \cdot 2 = 8$$

Gleiches Resultat wie das Integral. **Passt.**

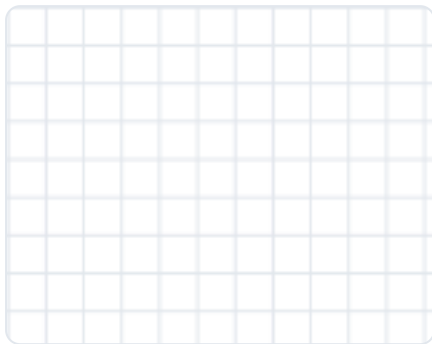
Die 3 häufigsten Fehler

- 1 **Unten minus oben.** ✗ $F(1) - F(3) = 1 - 9 = -8$
Merke: immer oben minus unten.
- 2 **Exponent erhöht, aber nicht geteilt.** ✗ $2x \rightarrow 2x^2$, also $18 - 2 = 16$
Nach plus 1 kommt immer das Teilen.
- 3 **f statt F eingesetzt.** ✗ $f(3) - f(1) = 6 - 2 = 4$
Die Grenzen gehören in F , nicht in f .

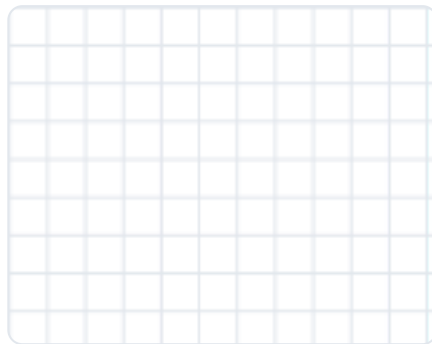
Übungen

A Berechne mit den 3 Schritten.

a) $\int_1^2 4x^3 dx$



b) $\int_0^3 x^2 dx$



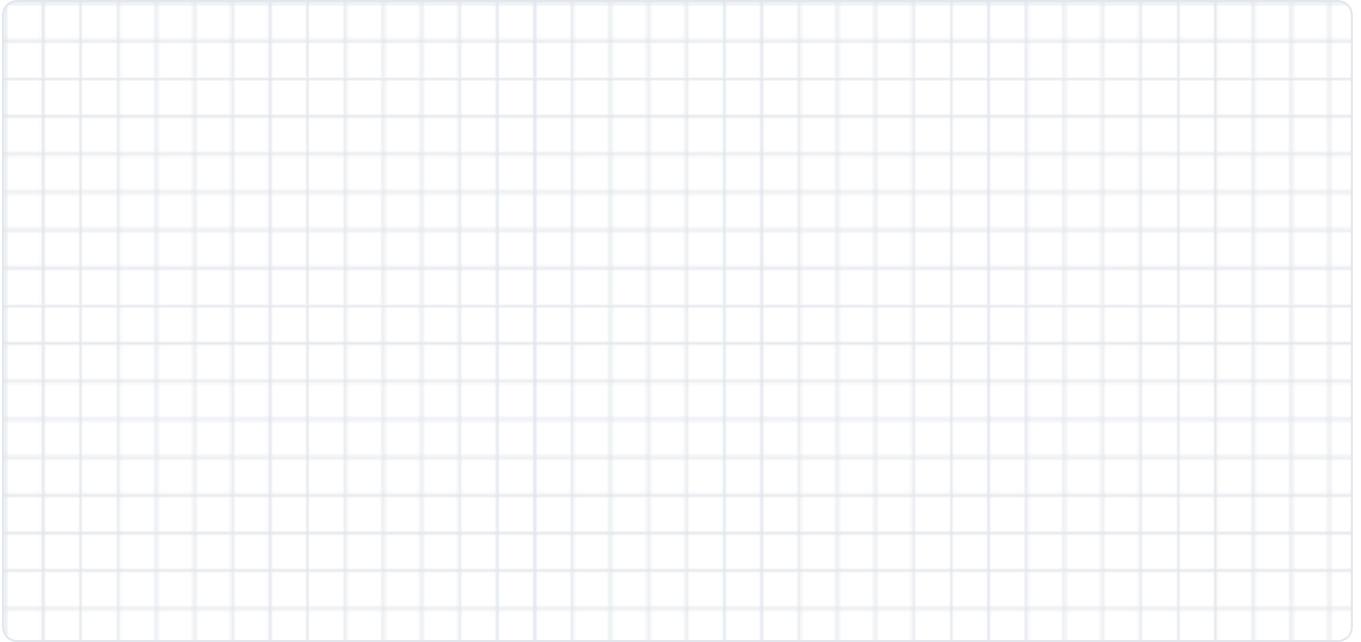
c) $\int_{-1}^1 3x^2 dx$



B Berechne $\int_1^4 (2x + 1) dx$. Mach die Probe mit dem Trapez: Die Fläche hat die parallelen Seiten $f(1)$ und $f(4)$.



C Für welche Zahl $k > 0$ gilt $\int_0^k 2x \, dx = 16$?



D Finde den Fehler und rechne richtig: $\int_0^2 3x^2 \, dx = [3x^3]_0^2 = 24$.



Erst rechnen, dann vergleichen.**A**

a) $F(x) = x^4$, also $2^4 - 1^4 = 16 - 1 = 15$.

b) $F(x) = \frac{x^3}{3}$, also $\frac{27}{3} - \frac{0}{3} = 9$.

c) $F(x) = x^3$, also $1^3 - (-1)^3 = 1 - (-1) = 2$. Achtung: $(-1)^3 = -1$.

B

$F(x) = x^2 + x$. $F(4) = 16 + 4 = 20$ und $F(1) = 1 + 1 = 2$, also $20 - 2 = 18$.

Probe: $f(1) = 3$, $f(4) = 9$, Höhe $h = 4 - 1 = 3$. $A = \frac{3+9}{2} \cdot 3 = 18$. **Passt.**

C

$\int_0^k 2x \, dx = [x^2]_0^k = k^2 - 0 = k^2$. Aus $k^2 = 16$ und $k > 0$ folgt $k = 4$.

D

Fehler 2: Der Exponent wurde erhöht, aber nicht geteilt. Richtig: $3x^2 \rightarrow 3 \cdot \frac{x^3}{3} = x^3$, also $[x^3]_0^2 = 8 - 0 = 8$.