



FUNKTIONEN · HYPERBEL

Hyperbel zeichnen in 3 Schritten.

Zwei Äste, zwei Asymptoten, drei Schritte: So zeichnest du jede verschobene Hyperbel. Asymptoten sind Linien, denen die Äste immer näher kommen, ohne sie zu berühren.

MERKE

$$f(x) = \frac{a}{x-b} + c$$

senkrechte Asymptote: $x = b$

waagrechte Asymptote: $y = c$

Zentrum: $Z(b | c)$

Beispiel: $f(x) = \frac{4}{x-2} + 1$

1

Nenner null setzen

Durch 0 teilen geht nicht. Wo der Nenner 0 wird, hat f keinen Wert: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$. Das ist die **senkrechte Asymptote** $x = 2$.

Vorzeichen dreht: aus -2 wird $+2$!

2

Hinten ablesen

Für grosse x wird der Bruch winzig: $f(102) = \frac{4}{100} + 1 = 1,04$ und $f(1002) = 1,004$. Übrig bleibt die Zahl hinten. Das ist die **waagrechte Asymptote** $y = 1$.

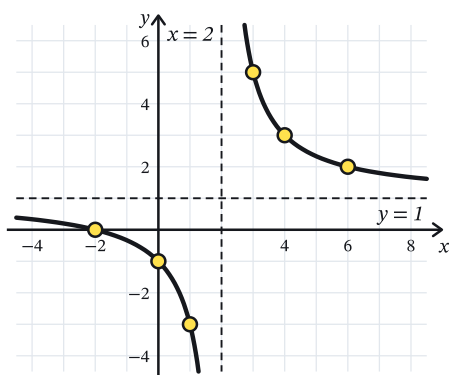
3

Punkte setzen, Äste zeichnen

Je drei Punkte links und rechts der senkrechten Asymptote:

x	-2	0	1	3	4	6
$f(x)$	0	-1	-3	5	3	2

Die Äste nie über die Asymptote verbinden!



PROBE

Die Hyperbel ist punktsymmetrisch zum Zentrum $Z(2 | 1)$. Jedes Punktpaar hat dort seine Mitte, zum Beispiel $(3 | 5)$ und $(1 | -3)$:

$$\frac{3+1}{2} = 2, \quad \frac{5+(-3)}{2} = 1$$

Gleich bei $(4 | 3)$ und $(0 | -1)$ sowie bei $(6 | 2)$ und $(-2 | 0)$. **Passt.**

Die 3 häufigsten Fehler

- 1** Vorzeichen nicht gedreht. $\times x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
Setz ein: $2 - 2 = 0$. Die Asymptote liegt bei $x = 2$.
- 2** Die $+1$ vergessen. $\times$ waagrechte Asymptote $y = 0$
Die Zahl hinten schiebt die Linie nach oben: $y = 1$.
- 3** Durch 0 geteilt. $\times f(2) = 4 : 0 + 1 = 1$
 $4 : 0$ gibt es nicht. Bei $x = 2$ liegt kein Punkt.

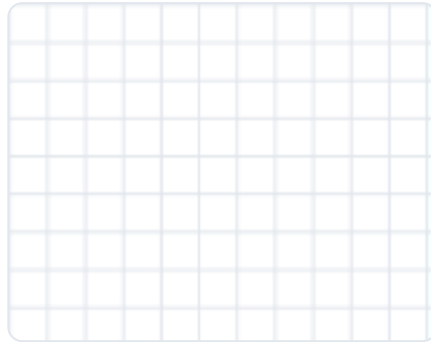
Übungen

A Bestimme die beiden Asymptoten und das Zentrum Z .

a) $f(x) = \frac{6}{x+3} - 2$

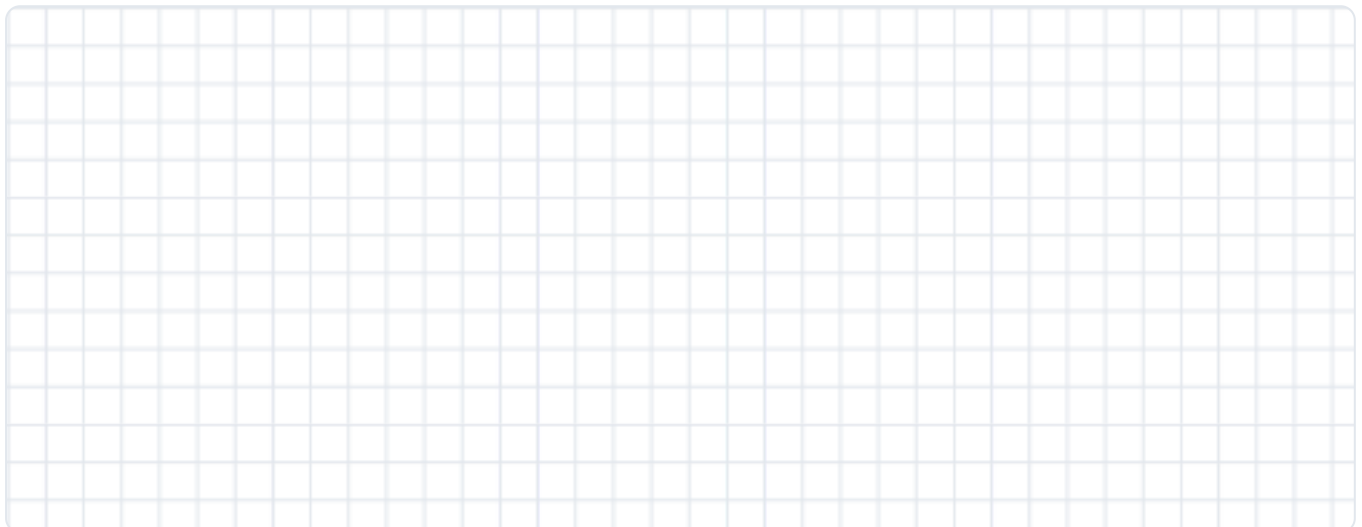
b) $f(x) = \frac{2}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{-3}{x+1} + 2$



B Zeichne den Graphen von $f(x) = \frac{6}{x+3} - 2$. Trage zuerst die Asymptoten ein, dann je drei Punkte links und rechts.

x						
$f(x)$						



C Bei $f(x) = \frac{-3}{x+1} + 2$ ist a negativ. Berechne $f(0)$ und $f(-2)$. Wo liegen die Äste, verglichen mit Aufgabe B? Bestimme die Nullstelle.



D Eine Hyperbel $f(x) = \frac{a}{x-4} - 1$ geht durch $P(5 | 2)$. Bestimme a und mache die Probe mit $f(7)$.



Erst rechnen, dann vergleichen.

A

a) Nenner $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$, hinten -2 : Asymptoten $x = -3$ und $y = -2$, Zentrum $Z(-3 | -2)$.

b) $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. Hinten steht nichts, also $+0$: $y = 0$, Zentrum $Z(1 | 0)$.

c) $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$, hinten $+2$: $y = 2$, Zentrum $Z(-1 | 2)$.

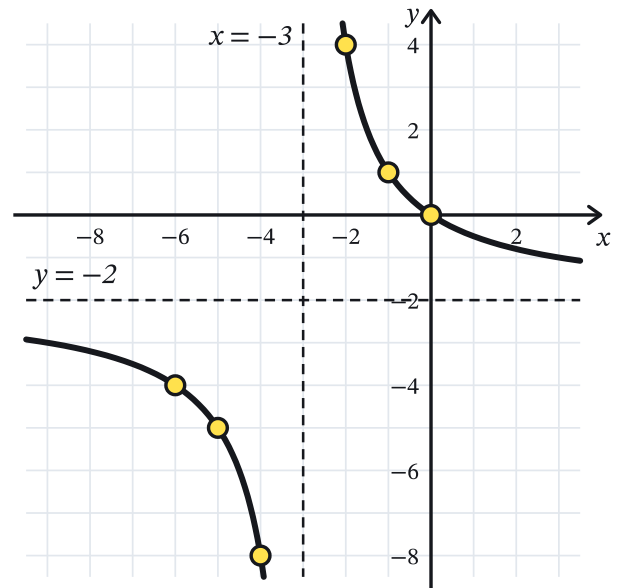
B

Asymptoten $x = -3$ und $y = -2$. Wertetabelle:

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	-4	-5	-8		4	1	0

Zum Beispiel $f(-1) = \frac{6}{2} - 2 = 1$. Der Graph geht durch den Nullpunkt: $f(0) = \frac{6}{3} - 2 = 0$.

Probe: $(-2 | 4)$ und $(-4 | -8)$ haben die Mitte
 $\left(\frac{-2+(-4)}{2} \mid \frac{4+(-8)}{2} \right) = (-3 | -2) = Z$. **Passt.**



C

$f(0) = \frac{-3}{1} + 2 = -1$ und $f(-2) = \frac{-3}{-1} + 2 = 5$. Weil a negativ ist, liegen die Äste links oben und rechts unten vom Zentrum $Z(-1 | 2)$. In Aufgabe B liegen sie rechts oben und links unten.

Nullstelle: $\frac{-3}{x+1} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{-3}{x+1} = -2 \Rightarrow x + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

D

$P(5 | 2)$ einsetzen: $2 = \frac{a}{5-4} - 1 = a - 1 \Rightarrow a = 3$, also $f(x) = \frac{3}{x-4} - 1$.

Probe: $f(7) = \frac{3}{3} - 1 = 0$. Die Hyperbel schneidet die x -Achse bei $x = 7$. **Passt.**