

Ziehen mit und ohne Zurücklegen

10 Aufgaben · 40 Minuten

Name: _____

Datum: _____

Die vier Fälle der Kombinatorik

Zwei Entscheidungsfragen: **1. Mit oder ohne Zurücklegen?** **2. Reihenfolge wichtig (geordnet) oder egal (ungeordnet)?**

Fall	Reihenfolge	Zurücklegen	Formel
Var. mit Wiederh.	wichtig	ja	n^k
Var. ohne Wiederh.	wichtig	nein	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Komb. ohne Wiederh.	egal	nein	$\binom{n}{k}$
Komb. mit Wiederh.	egal	ja	$\binom{n+k-1}{k}$

n = Gesamtmenge, k = Anzahl Ziehungen. $0! = 1$.

1. Teil A – Grundlagen

Fälle identifizieren und direkte Formeln anwenden

Aufgabe A –

2 P.

Entscheide für jede Situation: (1) Mit oder ohne Zurücklegen? (2) Geordnet oder ungeordnet? Notiere deine Antwort.

- a) Ein 4-stelliger PIN-Code (Ziffern 0–9).
- b) Lotto „6 aus 42“.
- c) Gold, Silber, Bronze bei 8 Läufern.
- d) 3 Kugeln Eis aus 8 Sorten, Reihenfolge egal, dieselbe Sorte mehrfach erlaubt.

Aufgabe B –

2 P.

Berechne:

a) $6^3 =$

b) $\frac{10!}{7!} =$

c) $\binom{9}{2} =$

Aufgabe C —

2 P.

Wahr oder falsch? Korrigiere die falschen Aussagen.

Aussage	Wahr	Falsch
Bei einem Passwort ist die Reihenfolge wichtig → geordnete Stichprobe.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Beim Lotto wird mit Zurücklegen gezogen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\binom{45}{6}$ ist die Formel für Lotto «6 aus 45».	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\frac{12!}{8!}$ und $\binom{12}{4}$ liefern dasselbe Ergebnis.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2. Teil B – Anwendung

Die richtige Formel wählen und rechnen

Aufgabe D —

3 P.

Ein Fahrradschloss hat einen 4-stelligen Zahlencode. Jede Stelle kann eine Ziffer von 0–9 sein. Wie viele verschiedene Codes sind möglich?

Identifiziere zuerst den Fall mit den zwei Fragen.

Rechnung / Skizze

Aufgabe E —

3 P.

Bei einem Wettbewerb treten 12 Sportler an. Für die ersten drei Plätze gibt es Medaillen (Gold, Silber, Bronze). Wie viele verschiedene Podiumsbesetzungen sind möglich?

Rechnung / Skizze

Aufgabe F —

3 P.

Ein Verein mit 25 Mitgliedern wählt einen 3-köpfigen Vorstand. Alle drei haben dieselbe Rolle (gleichberechtigt). Wie viele verschiedene Vorstände kann es geben?

Rechnung / Skizze

Aufgabe G —

3 P.

Eine Kantine bietet 5 Menüs. Du darfst an 3 Tagen jeweils ein Menü wählen, auch mehrmals dasselbe. Die Reihenfolge der Tage zählt (Montag Menü A \neq Dienstag Menü B ist ein anderes Ergebnis). Wie viele verschiedene 3-Tages-Pläne sind möglich?

Rechnung / Skizze

3. Teil C – Vertiefung

Textaufgaben mit Fallunterscheidung

Aufgabe H –

4 P.

Ein Schüler hat 7 verschiedene Stifte. Er soll 3 davon für die Prüfung einpacken.

- a)** Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 3 Stifte auszuwählen? (Reihenfolge egal, jeder Stift nur einmal.)
- b)** Der Lehrer ändert die Regel: Die 3 Stifte sollen in einer bestimmten Reihenfolge auf dem Tisch liegen (z. B. Bleistift links, Kugelschreiber Mitte, Filzstift rechts). Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt?

Rechnung / Skizze

Aufgabe I –

4 P.

Ein Restaurant bietet ein „3-Gänge-Überraschungsmenü“ an: Der Koch wählt je einen Gang aus der Vorspeisen-Karte (4 Optionen), der Hauptgang-Karte (6 Optionen) und der Dessert-Karte (3 Optionen). Wie viele verschiedene Überraschungsmenüs sind möglich?

Tipp: Hier brauchst du das Produktprinzip, keinen Binomialkoeffizienten.

Rechnung / Skizze

Aufgabe J –

5 P.

Betrachte folgende zwei Situationen:

Situation A: Ein Passwort besteht aus 3 **verschiedenen** Kleinbuchstaben (a–z, 26 Stück). Die Reihenfolge zählt.

Situation B: Aus 26 Kandidaten sollen 3 **gleichberechtigte** Sprecher gewählt werden.

- a) Berechne die Anzahl möglicher Passwörter (Situation A). Welcher Fall liegt vor?
- b) Berechne die Anzahl möglicher Sprechergruppen (Situation B). Welcher Fall liegt vor?
- c) Warum ist das Ergebnis von a) grösser als das von b), obwohl beide $n = 26$ und $k = 3$ haben? Erkläre den Unterschied in 1–2 Sätzen.

Rechnung / Skizze

Lösungen

Aufgabe 1

- a) Mit Zurücklegen (Ziffern mehrfach), geordnet (1234 \neq 4321).
- b) Ohne Zurücklegen (jede Zahl nur 1x), ungeordnet (Reihenfolge egal).
- c) Ohne Zurücklegen (ein Läufer nur ein Platz), geordnet (Gold \neq Bronze).
- d) Mit Zurücklegen (gleiche Sorte mehrfach), ungeordnet (Reihenfolge der Kugeln egal).

Aufgabe 2

- a) $6^3 = 216$
- b) $\frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$
- c) $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = \frac{72}{2} = 36$

Aufgabe 3

Wahr Bei einem Passwort zählt die Reihenfolge – 1234 ist ein anderes Passwort als 4321.
Wahr.

Falsch Beim Lotto wird **ohne** Zurücklegen gezogen – jede Zahl nur einmal. **Falsch.**

Wahr Lotto «6 aus 45» – ohne Zurücklegen, ungeordnet $\rightarrow \binom{45}{6}$. **Wahr.**

Falsch $\frac{12!}{8!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11'880$, aber $\binom{12}{4} = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = 495$. Die beiden sind **nicht** gleich – bei $\frac{12!}{8!}$ fehlt die Division durch 4!. **Falsch.**

Aufgabe 4

$n = 10$ (Ziffern), $k = 4$ (Stellen). Mit Zurücklegen (gleiche Ziffer mehrfach), geordnet (Code 1234 \neq 4321).

Formel: $n^k = 10^4 = 10'000$ verschiedene Codes.

Aufgabe 5

$n = 12$ (Sportler), $k = 3$ (Medaillen). Ohne Zurücklegen (ein Sportler nur ein Platz), geordnet (Gold \neq Bronze).

Variation ohne Wiederholung:

$$\frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1'320$$

Podiumsbesetzungen.

Aufgabe 6

$n = 25$ (Mitglieder), $k = 3$ (Vorstandsplätze). Ohne Zurücklegen, ungeordnet (alle gleichberechtigt).

Kombination ohne Wiederholung:

$$\binom{25}{3} = \frac{25!}{3! \cdot 22!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{13'800}{6} = 2'300$$

Vorstände.

Aufgabe 7

$n = 5$ (Menüs), $k = 3$ (Tage). Mit Zurücklegen (gleiches Menü mehrfach), geordnet (Mo A \neq Di B ist relevant).

Formel: $n^k = 5^3 = 125$ verschiedene 3-Tages-Pläne.

Aufgabe 8

a) 3 Stifte aus 7, Reihenfolge egal, kein Stift doppelt \rightarrow Kombination ohne Wiederholung.

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{210}{6} = 35$$

Möglichkeiten.

b) Reihenfolge zählt jetzt (Anordnung auf dem Tisch) \rightarrow Variation ohne Wiederholung.

$$\frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Möglichkeiten.

Der Faktor 6 ($= 3!$) macht den Unterschied: Jede 3er-Auswahl aus a) lässt sich auf $3! = 6$ Arten anordnen. $35 \cdot 6 = 210$.

Aufgabe 9

Produktprinzip: $4 \cdot 6 \cdot 3 = 72$ verschiedene Überraschungsmenüs.

Hier brauchst du kein „Ziehen mit/ohne Zurücklegen“, weil es drei **unabhängige** Entscheidungen sind (Vorspeise, Hauptgang, Dessert — jede aus ihrer eigenen Karte). Deshalb das Produktprinzip.

Aufgabe 10

a) Situation A: Ohne Zurücklegen („verschiedene“ Buchstaben), geordnet (Passwort).

$$\frac{26!}{(26-3)!} = \frac{26!}{23!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 = 15'600$$

Passwörter.

b) Situation B: Ohne Zurücklegen, ungeordnet (gleichberechtigt).

$$\binom{26}{3} = \frac{26!}{3! \cdot 23!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{15'600}{6} = 2'600$$

Sprechergruppen.

c) Das Ergebnis in a) ist 6-mal grösser, weil bei Situation A die Reihenfolge zählt: abc, acb, bac, bca, cab, cba sind 6 **verschiedene** Passwörter. Bei Situation B sind es 6 Darstellungen **derselben** Sprechergruppe — deshalb wird durch $3! = 6$ geteilt. Die Division durch $k!$ ist genau der Unterschied zwischen Variation und Kombination.