Ziehen mit einem Griff – der Binomialkoeffizient

10 Aufgaben · 40 Minuten

Name: ____________________

Datum: ____________________

Ziehen mit einem Griff – Kombination ohne Wiederholung

Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

n = Gesamtmenge, k = Auswahl (es gilt $k \leq n$).

Bedingungen: Kein Zurücklegen (jedes Objekt nur einmal), Reihenfolge **egal**.

Symmetrie:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

— z. B. $\binom{20}{18} = \binom{20}{2}$.

Randfälle:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad 0! = 1$$

.

Produktregel: Bei mehreren unabhängigen Auswahlen die Binomialkoeffizienten multiplizieren.

1. Teil A – Grundlagen

Binomialkoeffizient direkt berechnen

Aufgabe A — 2 P.

Berechne die folgenden Binomialkoeffizienten. Kürze zuerst.

a) $\binom{6}{2} =$ **b)** $\binom{7}{3} =$ **c)** $\binom{5}{1} =$

Aufgabe B — 2 P.

Berechne mithilfe der Symmetrie-Eigenschaft.

a) $\binom{10}{8}$ — nutze $\binom{10}{2}$.

b) $\binom{15}{13}$ — nutze $\binom{15}{2}$.

> **Hinweis:** Symmetrie: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Wenn k gross ist, rechne mit $n - k$.

Rechnung / Skizze

Aufgabe C — 2 P.

Wahr oder falsch? Begründe jede falsche Aussage kurz.

Aussage	Wahr	Falsch
$\binom{5}{2} = 10$	☐	☐
$\binom{4}{4} = 4$	☐	☐
$\binom{6}{0} = 0$	☐	☐
$\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$	☐	☐

2. Teil B – Anwendung

Ziehen mit einem Griff in bekannten Situationen

Aufgabe D — 3 P.

Beim Schweizer Zahlenlotto werden 6 Zahlen aus 42 gezogen. Die Reihenfolge ist egal. Wie viele verschiedene Tippreihen gibt es? Schreibe den Rechenweg vollständig auf.

Rechnung / Skizze

Aufgabe E — 3 P.

Aus einer Klasse mit 24 Schülerinnen und Schülern soll ein 5-köpfiges Organisationsteam gebildet werden. Alle Mitglieder sind gleichberechtigt. Wie viele verschiedene Teams sind möglich?

Rechnung / Skizze

Aufgabe F — 3 P.

In einer Gelateria gibt es 14 Eissorten. Du bestellst einen Becher mit 3 verschiedenen Kugeln. Wie viele verschiedene Becher sind möglich?

Rechnung / Skizze

Aufgabe G — 3 P.

Multiple Choice: Eine Pizzeria bietet 8 Zutaten an. Du stellst dir eine Pizza mit genau 4 Zutaten zusammen. Wie viele Pizzas sind möglich?

- [ ] **A.** $8^4 = 4'096$
- [ ] **B.** $\frac{8!}{4!} = 1'680$
- [ ] **C.** $\binom{8}{4} = 70$
- [ ] **D.** $4! = 24$

3. Teil C – Vertiefung

Zusammengesetzte Auswahlen und Textaufgaben

Aufgabe H — 4 P.

Eine Firma hat 10 Entwickler und 6 Designer. Für eine Messe soll ein Team aus 3 Entwicklern und 2 Designern zusammengestellt werden.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 3 Entwickler auszuwählen?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 2 Designer auszuwählen?

c) Wie viele verschiedene Messeteams sind insgesamt möglich?

> **Hinweis:** Wende die Produktregel an: Multipliziere die beiden Binomialkoeffizienten.

Rechnung / Skizze

Aufgabe I — 4 P.

Ein Kartenspiel hat 52 Karten, darunter 4 Asse. Du ziehst 5 Karten mit einem Griff.

a) Wie viele verschiedene 5er-Hände gibt es insgesamt?

b) Wie viele 5er-Hände enthalten **genau 2 Asse**?

Tipp für b): Wähle zuerst 2 Asse aus den 4 Assen, dann 3 Nicht-Asse aus den restlichen 48 Karten. Multipliziere beide Ergebnisse.

> **Hinweis:** Bei b): Zwei unabhängige Auswahlen: 2 Asse aus 4 + 3 Nicht-Asse aus 48.

Rechnung / Skizze

Aufgabe J — 5 P.

Eine Prüfung besteht aus 12 Aufgaben. Du musst genau 8 davon bearbeiten.

a) Wie viele Möglichkeiten hast du, deine 8 Aufgaben auszuwählen?

b) Wie viele Möglichkeiten hast du, wenn du **Aufgabe 1** auf jeden Fall bearbeiten musst? (Dann wählst du noch 7 aus den restlichen 11.)

c) Warum ist die Anzahl in b) kleiner als in a)? Erkläre in einem Satz.

> **Hinweis:** Wenn eine Aufgabe fix ist, reduziert sich die Auswahl auf $n-1$ Objekte und $k-1$ Auswahlen.

Rechnung / Skizze

Lösungen

Aufgabe 1

a) $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15$

b) $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{210}{6} = 35$

c) $\binom{5}{1} = \frac{5}{1} = 5$

Aufgabe 2

a) $\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = \frac{90}{2} = 45$

b) $\binom{15}{13} = \binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = \frac{210}{2} = 105$

Die Symmetrie spart Rechenarbeit: Statt im Zähler 13 bzw. 8 Faktoren zu multiplizieren, brauchst du nur 2.

Aufgabe 3

Wahr $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$. **Wahr.**

Falsch $\binom{4}{4} = 1$, nicht 4. Es gibt genau eine Möglichkeit, alle 4 Objekte auszuwählen. **Falsch.**

Falsch $\binom{6}{0} = 1$, nicht 0. Es gibt genau eine Möglichkeit, nichts auszuwählen. **Falsch.**

Wahr Symmetrie: $\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 56$. **Wahr.**

Aufgabe 4

$n = 42$, $k = 6$. Kombination ohne Wiederholung (Reihenfolge egal, keine Wiederholung).

$$\binom{42}{6} = \frac{42!}{6! \cdot 36!} = \frac{42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Zähler: $42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 = 3'776'965'920$

Nenner: $6! = 720$

$$\binom{42}{6} = \frac{3'776'965'920}{720} = 5'245'786$$

Es gibt **5'245'786 verschiedene Tippreihen**.

Aufgabe 5

$n = 24$, $k = 5$, Reihenfolge egal, keine Wiederholung.

$$\binom{24}{5} = \frac{24!}{5! \cdot 19!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Zähler: $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 = 5'100'480$

Nenner: $5! = 120$

$$\binom{24}{5} = \frac{5'100'480}{120} = 42'504$$

Es gibt **42'504 verschiedene Teams**.

Aufgabe 6

$n = 14$, $k = 3$, Reihenfolge egal, alle Kugeln verschieden (keine Wiederholung).

$$\binom{14}{3} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2184}{6} = 364$$

Es gibt **364 verschiedene Becher**.

Aufgabe 7

Die richtige Antwort ist **C:** $\boldsymbol{\binom{8}{4} = 70}$.

Begründung: Die Reihenfolge der Zutaten auf der Pizza ist egal (Salami + Pilze = Pilze + Salami). Jede Zutat nur einmal $\longrightarrow$ Kombination ohne Wiederholung.

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1680}{24} = 70$$

Aufgabe 8

a) 3 Entwickler aus 10:

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{720}{6} = 120$$

b) 2 Designer aus 6:

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15$$

c) Produktregel: $120 \cdot 15 = 1'800$ verschiedene Messeteams.

Aufgabe 9

a) 5 Karten aus 52:

$$\binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Zähler: $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 311'875'200$ Nenner: $5! = 120$

$$\binom{52}{5} = 2'598'960$$

verschiedene 5er-Hände.

b) Schritt 1: 2 Asse aus 4:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

Schritt 2: 3 Nicht-Asse aus 48:

$$\binom{48}{3} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{103'776}{6} = 17'296$$

Produktregel: $6 \cdot 17'296 = 103'776$ Hände mit genau 2 Assen.

Nur etwa 4% aller Hände enthalten genau 2 Asse.

Aufgabe 10

a) 8 aus 12 Aufgaben:

$$\binom{12}{8} = \binom{12}{4}$$

(Symmetrie)

$$\binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11'880}{24} = 495$$

b) Aufgabe 1 ist fix. Bleiben 7 aus 11 übrig:

$$\binom{11}{7} = \binom{11}{4}$$

(Symmetrie)

$$\binom{11}{4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7'920}{24} = 330$$

c) In b) ist die Anzahl kleiner, weil Aufgabe 1 fest vorgegeben ist — dadurch reduziert sich die freie Auswahl von 8 aus 12 auf 7 aus 11, was weniger Kombinationen ergibt ($330 < 495$).