Kombinatorik

10 Aufgaben · 40 Minuten

Name: ______________________

Datum: ______________________

Kombinatorik – Übersicht

Zählprinzip (Produktregel):

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

bei k unabhängigen Schritten.

Permutation:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

— Anordnung aller n Objekte.

Variation (ohne Wiederholung):

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

— k aus n, Reihenfolge zählt.

Kombination (ohne Wiederholung):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

— k aus n, Reihenfolge egal.

Zwei Entscheidungsfragen: 1. Zählt die Reihenfolge? 2. Ist Wiederholung (Zurücklegen) erlaubt?

$0! = 1$ (Konvention)

1. Teil A – Grundlagen

Fakultät, Produktprinzip und Permutationen

Aufgabe A — 2 P.

Berechne ohne Taschenrechner.

a) $5! =$ **b)** $3! =$ **c)** $4! \cdot 3! =$

Aufgabe B — 2 P.

Wahr oder falsch? Kreuze an.

Aussage	Wahr	Falsch
$0! = 0$	☐	☐
$3! = 6$	☐	☐
$2! = 2$	☐	☐
$n! = n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$	☐	☐

Aufgabe C — 2 P.

Beim Mittagessen in der Mensa kannst du wählen: 3 Vorspeisen, 4 Hauptgerichte und 2 Desserts. Wie viele verschiedene Menüs (1 Vorspeise + 1 Hauptgang + 1 Dessert) sind möglich? Wende das Produktprinzip an.

Rechnung / Skizze

2. Teil B – Anwendung

Variationen und Kombinationen unterscheiden

Aufgabe D — 3 P.

Berechne die Anzahl der Möglichkeiten. Entscheide vorher: Zählt die Reihenfolge? Ist Wiederholung erlaubt?

a) 6 Personen stellen sich für ein Foto in einer Reihe auf.

b) Ein 3-stelliger PIN-Code mit Ziffern 0–9 (Wiederholung erlaubt).

> **Hinweis:** Schreibe zuerst auf, welche Formel du jeweils verwendest.

Rechnung / Skizze

Aufgabe E — 3 P.

Aus 20 Schülerinnen und Schülern werden 3 für die SMV (Schülermitverantwortung) gewählt. Alle drei haben die gleiche Rolle. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Rechnung / Skizze

Aufgabe F — 3 P.

Bei einem Wettkampf mit 12 Teilnehmern werden Gold, Silber und Bronze vergeben. Wie viele verschiedene Podiumsbesetzungen sind möglich?

Rechnung / Skizze

Aufgabe G — 3 P.

Welche Formel passt zu welcher Situation? Verbinde mit Linien oder notiere die Zuordnung.

Nr.	Situation	Formel
1.	4 aus 20 Personen als Team auswählen	
2.	5 Bücher in ein Regal sortieren	
3.	3-stelliger Code aus 5 Buchstaben, Wiederholung erlaubt	
4.	Gold/Silber/Bronze aus 8 Läufern	

3. Teil C – Vertiefung

Textaufgaben und mehrstufige Berechnungen

Aufgabe H — 4 P.

Ein Schweizer Autokennzeichen (ohne Kantonskürzel) besteht aus 2 Buchstaben (A–Z, 26 Stück) gefolgt von 3 Ziffern (0–9). Buchstaben und Ziffern dürfen sich wiederholen.

a) Wie viele verschiedene Kennzeichen (nur der numerische Teil) sind möglich?

b) Für einen speziellen Kanton sind noch 5000 Kennzeichen frei. Reichen die Kombinationen? Begründe mit einer Rechnung.

Rechnung / Skizze

Aufgabe I — 4 P.

Ein Verein hat 15 Mitglieder. Es soll ein Vorstand aus 5 Personen gebildet werden: Präsident/in, Vizepräsident/in, Kassier/in, Aktuar/in und Beisitzer/in. Alle Rollen sind unterschiedlich.

a) Wie viele verschiedene Vorstandszusammensetzungen gibt es?

Rechnung / Skizze

Aufgabe J — 5 P.

Ein Komitee besteht aus 3 Frauen und 2 Männern. Zur Auswahl stehen 7 Frauen und 5 Männer.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 3 Frauen auszuwählen?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 2 Männer auszuwählen?

c) Wie viele verschiedene Komitees sind insgesamt möglich? Wende die Produktregel an.

d) Erkläre in einem Satz, warum du bei den Frauen die Kombinations-Formel verwendest und nicht die Variations-Formel.

> **Hinweis:** Die Produktregel: Wenn zwei unabhängige Auswahlen miteinander kombiniert werden, multiplizieren sich die Möglichkeiten.

Rechnung / Skizze

Lösungen

Aufgabe 1

a) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

c) $4! \cdot 3! = 24 \cdot 6 = 144$

Aufgabe 2

Falsch $0! = 1$, nicht 0. **Falsch.**

Wahr $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. **Wahr.**

Wahr $2! = 2 \cdot 1 = 2$. **Wahr.**

Falsch Die Fakultät ist $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, nicht $n \cdot (n+1)$. **Falsch.**

Aufgabe 3

Nach dem Produktprinzip: $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$

Es gibt **24 verschiedene Menüs**.

Aufgabe 4

a) Permutation von 6 Personen: Reihenfolge zählt, keine Wiederholung.

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Möglichkeiten.

b) 3 Stellen, je 10 Ziffern, mit Wiederholung. Reihenfolge zählt.

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$$

PIN-Codes.

Aufgabe 5

Auswahl von 3 aus 20, Reihenfolge egal (alle haben die gleiche Rolle), keine Wiederholung.

Kombination:

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6840}{6} = 1140$$

Es gibt **1'140 Möglichkeiten**.

Aufgabe 6

Auswahl von 3 aus 12, Reihenfolge zählt (Gold $\neq$ Silber $\neq$ Bronze), keine Wiederholung.

Variation ohne Wiederholung:

$$\frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

Es gibt **1'320 verschiedene Podiumsbesetzungen**.

Aufgabe 7

Nr	Situation	Formel
1.	4 aus 20 Personen als Team	Kombination: $\binom{20}{4}$
2.	5 Bücher sortieren	Permutation: $5!$
3.	3-stelliger Code, Wiederholung	Produktprinzip: 5^3
4.	Gold/Silber/Bronze aus 8	Variation: $\frac{8!}{5!}$

Aufgabe 8

a) 2 Buchstaben: $26 \cdot 26 = 26^2 = 676$. 3 Ziffern: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$. Gesamt: $676 \cdot 1000 = 676'000$ Kennzeichen.

b) $676'000 > 5000$. Es sind mehr als genug Kombinationen frei. Es reicht bei Weitem.

Aufgabe 9

a) 5 unterschiedliche Rollen aus 15 Personen. Reihenfolge zählt (Präsident $\neq$ Kassier), keine Wiederholung.

Variation ohne Wiederholung:

$$\frac{15!}{(15-5)!} = \frac{15!}{10!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360'360$$

Es gibt **360'360 verschiedene Vorstandszusammensetzungen**.

Aufgabe 10

a) 3 Frauen aus 7 auswählen, Reihenfolge egal:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{210}{6} = 35$$

b) 2 Männer aus 5 auswählen, Reihenfolge egal:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$$

c) Produktregel: $35 \cdot 10 = 350$ verschiedene Komitees.

d) Weil es bei der Frauen-Auswahl egal ist, in welcher Reihenfolge sie gewählt werden — die drei Frauen bilden zusammen das Komitee, ohne Rangfolge. Deshalb Kombination ($\binom{7}{3}$) statt Variation.