# Anzahlen systematisch bestimmen

10 Aufgaben · 40 Minuten

Name: ____________________

Datum: ____________________

**Grundformeln der Kombinatorik**

**Produktprinzip:** $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ bei $k$ unabhängigen Entscheidungen.

**Permutation:** $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (alle $n$ Objekte anordnen)

**Variation ohne Wiederholung:** $\frac{n!}{(n-k)!}$ ($k$ aus $n$, **Reihenfolge zählt**)

**Kombination ohne Wiederholung:** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ ($k$ aus $n$, **Reihenfolge egal**)

**Mit Wiederholung (geordnet):** $n^k$ (z. B. PIN-Code)

$0! = 1$ (Konvention)

# 1. Teil A – Grundlagen

Produktprinzip und Fakultät direkt anwenden

**Aufgabe A —** 2 P.

Berechne die Fakultäten.

**a)** $4! =$ **b)** $6! =$ **c)** $\frac{8!}{7!} =$

**Aufgabe B —** 2 P.

Ein Restaurant bietet 3 Suppen, 5 Hauptgänge und 2 Desserts an. Du wählst je eines. Wie viele verschiedene Menüs kannst du zusammenstellen? Schreibe die Rechnung mit dem Produktprinzip auf.

Rechnung / Skizze

**Aufgabe C —** 2 P.

Wahr oder falsch? Kreuze an und korrigiere falsche Aussagen.

| Aussage | Wahr | Falsch |
|---|---|---|
| Eine Permutation von 4 Objekten hat $4! = 24$ Möglichkeiten. | ☐ | ☐ |
| $0! = 1$ wurde einfach so festgelegt, ohne mathematischen Grund. | ☐ | ☐ |
| $\frac{10!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$ | ☐ | ☐ |
| $\frac{n!}{(n-k)!}$ verwendet man, wenn die Reihenfolge egal ist. | ☐ | ☐ |

## 2. Teil B – Anwendung

Fälle unterscheiden und Formeln gezielt einsetzen

**Aufgabe D —** 3 P.

Entscheide für jede Situation: (1) Zählt die Reihenfolge? (2) Ist Wiederholung erlaubt? Notiere dann die passende Formel und berechne das Ergebnis.

**a)** 8 Läufer – wie viele mögliche Siegerehrungen (Gold, Silber, Bronze)?

**b)** Ein 4-stelliger PIN-Code mit Ziffern 0–9 (Wiederholung erlaubt).

**c)** 5 verschiedene Bücher im Regal anordnen.

Rechnung / Skizze

**Aufgabe E —** 3 P.

Berechne die folgenden Binomialkoeffizienten schrittweise (kürzen vor dem Multiplizieren).

**a)** $\binom{7}{2}$

**b)** $\binom{8}{3}$

**c)** $\binom{10}{4}$

> **Hinweis:** Kürze den Bruch zuerst, z. B. $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1}$.

Rechnung / Skizze

**Aufgabe F —** 3 P.

Ein Passwort soll aus 3 verschiedenen Kleinbuchstaben (a–z, 26 Stück) bestehen. Wie viele Passwörter sind möglich?

**Tipp:** Die Reihenfolge zählt bei einem Passwort, und jeder Buchstabe darf nur einmal vorkommen ("verschieden").

Rechnung / Skizze

**Aufgabe G —** 3 P.

Multiple Choice: Welche Formel ist für die folgende Situation korrekt?

**Situation:** Aus 30 Schülerinnen und Schülern werden 5 für einen Ausflug ausgewählt. Alle 5 haben den gleichen Status (kein Gruppenleiter o. Ä.).

- [ ] **A.** $30^5$
- [ ] **B.** $\frac{30!}{25!}$
- [ ] **C.** $\binom{30}{5}$
- [ ] **D.** $5!$

# 3. Teil C – Vertiefung

Textaufgaben mit mehreren Schritten

**Aufgabe H —** 4 P.

Ein Schweizer Autokennzeichen hat das Format: Kantonskürzel, dann 2 Buchstaben (A–Z), dann 3 Ziffern (0–9). Der Kanton Zürich (ZH) hat etwa 1,6 Millionen Einwohner.

**a)** Berechne, wie viele Kennzeichen allein mit den Ziffern und Buchstaben möglich sind.

**b)** Würden die Kombinationen für Zürich reichen, wenn jedes Fahrzeug ein eigenes Kennzeichen bräuchte? Begründe.

> **Hinweis:** Die Buchstaben und Ziffern dürfen sich wiederholen.

Rechnung / Skizze

## Aufgabe I — 4 P.

Ein Startup mit 6 Mitarbeitern wählt aus seiner Belegschaft ein 3-köpfiges Führungsteam: CEO, CTO und CFO. Jede Person kann nur eine Rolle übernehmen.

**a)** Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Führungsteam zu besetzen?

**b)** Später beschliesst das Startup, dass alle 3 Führungskräfte gleichberechtigt sein sollen. Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt, 3 aus 6 auszuwählen?

Rechnung / Skizze

## Aufgabe J — 5 P.

Eine Eisdiele hat 10 Sorten. Du bestellst eine Waffel mit 3 Kugeln.

**a)** Wie viele Möglichkeiten hast du, wenn alle 3 Kugeln verschiedene Sorten haben müssen und die Anordnung auf der Waffel egal ist?

**b)** Wie viele Möglichkeiten hast du, wenn du dieselbe Sorte mehrfach nehmen darfst und die Reihenfolge egal ist? (Formel für Kombination mit Wiederholung: $\binom{n+k-1}{k}$)

**c)** Vergleiche die Ergebnisse aus a) und b). Warum ist b) grösser? Erkläre in 1–2 Sätzen.

> **Hinweis:** Bei c): Überlege, welche zusätzlichen Kombinationen durch die Wiederholung dazukommen.

Rechnung / Skizze

## Lösungen

**Aufgabe 1**

**a)** $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

**b)** $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

**c)** $\frac{8!}{7!} = 8$

**Aufgabe 2**

Produktprinzip: $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ verschiedene Menüs.

**Aufgabe 3**

**Wahr** $4! = 24$, korrekt. **Wahr.**

**Falsch** Die Festlegung $0! = 1$ hat einen mathematischen Grund: $\binom{n}{0} = 1$ muss gelten, und die Formel $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!}$ funktioniert nur mit $0! = 1$. **Falsch.**

**Wahr** $\frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$. **Wahr.**

**Falsch** Die Formel $\frac{n!}{(n-k)!}$ verwendet man, wenn die Reihenfolge **zählt** (Variation ohne Wiederholung). Wenn die Reihenfolge egal ist, nimmt man den Binomialkoeffizienten. **Falsch.**

**Aufgabe 4**

**a)** Gold, Silber, Bronze $\longrightarrow$ Reihenfolge zählt, keine Wiederholung. $n = 8, k = 3$.

$$\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Möglichkeiten.

**b)** 4 Stellen, je 10 Ziffern, Wiederholung erlaubt, Reihenfolge zählt.

$$10^4 = 10'000$$

PIN-Codes.

**c)** 5 Bücher $\longrightarrow$ Permutation aller 5 Objekte, Reihenfolge zählt.

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Anordnungen.

**Aufgabe 5**

**a)** $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = \frac{42}{2} = 21$

**b)** $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{336}{6} = 56$

**c)** $\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5040}{24} = 210$

**Aufgabe 6**

3 verschiedene Buchstaben aus 26, Reihenfolge zählt, keine Wiederholung.

Variation ohne Wiederholung:

$$\frac{26!}{(26-3)!} = \frac{26!}{23!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 = 15'600$$

Es gibt **15′600 mögliche Passwörter**.

**Aufgabe 7**

Die richtige Antwort ist **C:** $\binom{30}{5}$.

Begründung: Alle 5 haben den gleichen Status $\longrightarrow$ Reihenfolge egal. Keine Person kann doppelt gewählt werden $\longrightarrow$ ohne Wiederholung. Also Kombination ohne Wiederholung: $\binom{30}{5}$.

$$\binom{30}{5} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{17'100'720}{120} = 142'506$$

**Aufgabe 8**

**a)** 2 Buchstaben: je 26 Möglichkeiten. 3 Ziffern: je 10 Möglichkeiten.

$$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^2 \cdot 10^3 = 676 \cdot 1000 = 676'000$$

Kennzeichen.

**b)** $676'000 < 1'600'000$. Ohne das Kantonskürzel würden die Kombinationen **nicht** reichen. Aber in der Praxis unterscheidet das Kantonskürzel die Kennzeichen zusätzlich — insgesamt gibt es schweizweit also genug Kombinationen.

**Aufgabe 9**

**a)** CEO, CTO, CFO sind unterschiedliche Rollen $\longrightarrow$ Reihenfolge zählt. Aus 6 Personen 3 auswählen, ohne Wiederholung.

$$\frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Möglichkeiten.

**b)** Alle gleichberechtigt $\longrightarrow$ Reihenfolge egal. Kombination:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{6} = 20$$

Möglichkeiten.

Der Unterschied (120 vs. 20) zeigt: Sobald die Rollen festgelegt sind, gibt es 6-mal mehr Möglichkeiten — für jede 3er-Gruppe gibt es $3! = 6$ verschiedene Rollenverteilungen.

**Aufgabe 10**

**a)** 3 verschiedene Sorten aus 10, Reihenfolge egal, keine Wiederholung.

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{720}{6} = 120$$

Möglichkeiten.

**b)** Kombination mit Wiederholung: $n = 10$, $k = 3$.

$$\binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1320}{6} = 220$$

Möglichkeiten.

**c)** In b) sind es 100 Kombinationen mehr ($220 - 120 = 100$). Der Grund: Bei Wiederholung kommen alle Kombinationen dazu, bei denen eine Sorte 2-mal oder 3-mal gewählt wird (z. B. 3× Schokolade oder 2× Vanille + 1× Erdbeere). Diese sind in a) nicht erlaubt, weil dort alle Kugeln verschieden sein müssen.