Erwartungswert der Binomialverteilung

6 Aufgaben · 40 Minuten

Name: ______________________________

Datum: ______________________________

1. Teil A – Grundlagen

Einfache Berechnungen mit der Formel mu = n * p

Aufgabe A — 2 P.

Berechne den Erwartungswert μ für die folgenden Zufallsexperimente:

a) Werfen eines fairen Spielwürfels 30-mal ($n = 30$). Gezählt wird die Anzahl der gewürfelten Sechsen. b) Werfen einer fairen Münze 120-mal ($n = 120$). Gezählt wird die Anzahl der Kopfwürfe. c) Drehen eines Glücksrads 80-mal. Ein Viertel des Rades ist rot gefärbt; gezählt wird, wie oft das Rad auf rot stehen bleibt.

Aufgabe B — 2 P.

Eine Basketballspielerin trifft Freiwürfe mit einer konstanten Wahrscheinlichkeit von 75%. In einem wichtigen Spiel hat sie 16 Freiwürfe.

a) Berechne die Anzahl der Treffer, die sie im Durchschnitt erwarten kann. b) Warum ist es unwahrscheinlich, dass sie in genau diesem einen Spiel exakt diese Anzahl Treffer erzielt?

Rechnung / Skizze

2. Teil B – Anwendung

Komplexere Berechnungen und Fehleranalyse

Aufgabe C — 3 P.

Eine Fabrik stellt Glühbirnen her. Aus Erfahrung weiss man, dass 3% der produzierten Glühbirnen fehlerhaft sind. Ein Mitarbeiter entnimmt eine Kontrollcharge von 1500 Glühbirnen.

a) Berechne den Erwartungswert μ für die Anzahl fehlerhafter Glühbirnen in dieser Stichprobe.
b) Berechne die Standardabweichung σ für diese Stichprobe (gerundet auf 2 Dezimalstellen).

Rechnung / Skizze

Aufgabe D — 3 P.

Aussage	Wahr	Falsch
Der Erwartungswert der Binomialverteilung gibt an, welches Ergebnis bei einem einzelnen Versuch garantiert eintritt.	☐	☐
Wenn eine Zufallsvariable X binomialverteilt ist mit $n = 50$ und $p = 0.3$, dann ist der Erwartungswert $\mu = 15$.	☐	☐
Der Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariable darf auch eine Dezimalzahl (z. B. 4.8) sein.	☐	☐

3. Teil C – Vertiefung

Gewinnberechnung und Sigma-Regeln

Aufgabe E — 4 P.

Bei einem Gewinnspiel an einer Chilbi zahlt man keinen Einsatz, erhält aber bei jedem Gewinn 4 CHF ausgezahlt. Die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einem Versuch beträgt 30%. Ein Spieler macht 50 Durchgänge.

a) Wie viele Gewinne erwartet der Spieler im Durchschnitt? b) Welchen Gesamtgewinn (in CHF) kann der Spieler nach den 50 Runden im Durchschnitt erwarten?

Rechnung / Skizze

Aufgabe F — 4 P.

Eine Stichprobe von $n = 400$ Personen wird nach ihrem Fernsehverhalten befragt. Bekannt ist, dass 20% der Bevölkerung regelmässig Dokumentarfilme schauen.

a) Bestimme den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ für die Anzahl der Dokumentarfilm-Zuschauer in der Stichprobe. b) Bestimme das Intervall $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ (gerundet auf ganze Personen). In diesem Bereich liegen nach der Sigma-Regel etwa 95% aller Stichprobenergebnisse.

Rechnung / Skizze

Lösungen

Aufgabe 1

a) Die Wahrscheinlichkeit für eine 6 ist $p = \frac{1}{6}$.

$$\mu = n \cdot p = 30 \cdot \frac{1}{6} = 5$$

Der Erwartungswert beträgt 5 Sechser.

b) Die Wahrscheinlichkeit für Kopf ist $p = 0.5$.

$$\mu = n \cdot p = 120 \cdot 0.5 = 60$$

Der Erwartungswert beträgt 60-mal Kopf.

c) Die Wahrscheinlichkeit für rot ist $p = 0.25$.

$$\mu = n \cdot p = 80 \cdot 0.25 = 20$$

Der Erwartungswert beträgt 20 rote Felder.

Aufgabe 2

a) Mit $n = 16$ und $p = 0.75$:

$$\mu = n \cdot p = 16 \cdot 0.75 = 12$$

Sie erwartet im Durchschnitt 12 Treffer.

b) In einem einzelnen Spiel unterliegt das Ergebnis dem Zufall (Streuung). Sie kann auch 10, 11, 13 oder 14 Treffer erzielen. Erst bei sehr vielen Spielen nähert sich der Durchschnitt der tatsächlichen Treffer dem Wert 12 an.

Aufgabe 3

a) Mit $n = 1500$ und $p = 0.03$:

$$\mu = n \cdot p = 1500 \cdot 0.03 = 45$$

Der Mitarbeiter erwartet durchschnittlich 45 fehlerhafte Glühbirnen.

b) Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$:

$$\sigma = \sqrt{1500 \cdot 0.03 \cdot 0.97} = \sqrt{45 \cdot 0.97} = \sqrt{43.65} \approx 6.61$$

Die Standardabweichung beträgt rund 6.61 Glühbirnen.

Falsch Falsch, der Erwartungswert ist ein langfristiger theoretischer Mittelwert, kein garantiertes Einzelergebnis.

Wahr Korrekt, $\mu = 50 \cdot 0.3 = 15$.

Wahr Korrekt, da er einen Durchschnitt beschreibt, sind auch Dezimalzahlen mathematisch sinnvoll.

Aufgabe 5

a) Mit $n = 50$ und $p = 0.3$:

$$\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0.3 = 15$$

Der Spieler erwartet durchschnittlich 15 Gewinne.

b) Der durchschnittlich erwartete Gesamtgewinn ist der Erwartungswert der Gewinne multipliziert mit dem Gewinnbetrag von 4 CHF:

$$\text{Erwarteter Gewinn} = 15 \cdot 4 \quad \text{CHF} = 60 \quad \text{CHF}$$

Der Spieler kann einen durchschnittlichen Gewinn von 60 CHF erwarten.

Aufgabe 6

a) Mit $n = 400$ und $p = 0.2$:

$$\mu = n \cdot p = 400 \cdot 0.2 = 80$$

$$\sigma = \sqrt{400 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = \sqrt{80 \cdot 0.8} = \sqrt{64} = 8$$

Der Erwartungswert beträgt 80 Personen und die Standardabweichung beträgt 8 Personen.

b) $2\sigma = 2 \cdot 8 = 16$. Das Intervall lautet:

$$[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma] = [80 - 16, 80 + 16] = [64, 96]$$

Etwa 95% der Befragungsergebnisse werden zwischen 64 und 96 Dokumentarfilm-Zuschauern liegen.