Bernoulli-Experimente & Binomialverteilung

6 Aufgaben · 40 Minuten

Name: ______________________________

Datum: ______________________________

1. Teil A – Grundlagen

Begriffe und einfache Berechnungen

Aufgabe A — 2 P.

Bestimme, ob es sich bei den folgenden Zufallsexperimenten um ein Bernoulli-Experiment handelt. Begründe deine Antwort kurz.

a) Werfen eines fairen Spielwürfels und Zählen der Augenzahl 6. b) Ziehen einer Karte aus einem Stapel von 32 Karten (ohne Zurücklegen) und Prüfen, ob es ein Herz ist. c) Drehen eines Glücksrads, das zu 30% blau und zu 70% rot gefärbt ist, und Zählen der blauen Felder.

Aufgabe B — 2 P.

Ein Basketballspieler hat eine Freiwurfquote von 80%. Er wirft dreimal hintereinander. Die Würfe seien unabhängig.

a) Gib die Erfolgswahrscheinlichkeit p und die Misserfolgswahrscheinlichkeit q an. b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass er bei drei Würfen genau einmal trifft.

Rechnung / Skizze

2. Teil B – Anwendung

Berechnungen mit der Binomialformel

Aufgabe C — 3 P.

Eine faire Münze wird sechsmal geworfen ($n = 6$).

a) Berechne den Binomialkoeffizienten $\binom{6}{4}$. b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für genau 4-mal Kopf.

Rechnung / Skizze

Aufgabe D — 3 P.

Aussage	Wahr	Falsch
Bei einer Bernoulli-Kette bleibt die Erfolgswahrscheinlichkeit p von Versuch zu Versuch konstant.	☐	☐
Der Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariable muss immer eine ganze Zahl sein.	☐	☐
Wenn man eine Münze 5-mal wirft und 5-mal Kopf erhält, ist die Wahrscheinlichkeit für Kopf beim 6. Wurf grösser als 0.5.	☐	☐

3. Teil C – Vertiefung

Komplexere Aufgaben und Textaufgaben

Aufgabe E — 4 P.

In einer Fabrik sind erfahrungsgemäss 5% aller hergestellten Schrauben fehlerhaft. Ein Prüfer entnimmt zufällig eine Stichprobe von 8 Schrauben.

Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass: a) genau 2 Schrauben fehlerhaft sind. b) höchstens 1 Schraube fehlerhaft ist.

Rechnung / Skizze

Aufgabe F — 4 P.

Ein Multiple-Choice-Test besteht aus 5 Fragen. Zu jeder Frage gibt es 4 Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Ein Schüler rät bei jeder Frage rein zufällig.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Schüler mindestens 4 Fragen richtig beantwortet.

Rechnung / Skizze

Lösungen

Aufgabe 1

a) **Ja**, es gibt genau zwei Ausgänge (6 = Erfolg, keine 6 = Misserfolg) und die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$ bleibt bei jedem Wurf gleich. b) **Nein**, da die Karte nicht zurückgelegt wird, ändert sich die Wahrscheinlichkeit bei der nächsten Ziehung (die Versuche sind abhängig). c) **Ja**, es gibt genau zwei Ausgänge (blau = Erfolg, rot = Misserfolg) und die Wahrscheinlichkeit $p = 0.3$ bleibt konstant.

Aufgabe 2

a) Erfolgswahrscheinlichkeit: $p = 0.8$, Misserfolgswahrscheinlichkeit: $q = 1 - p = 0.2$. b) Gesucht ist $P(X = 1)$ für $n = 3$, $p = 0.8$:

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot p^1 \cdot q^2 = 3 \cdot 0.8 \cdot 0.2^2 = 3 \cdot 0.8 \cdot 0.04 = 0.096$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt **9.6%**.

Aufgabe 3

a) $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$. b) $P(X = 4) = \binom{6}{4} \cdot p^4 \cdot q^2 = 15 \cdot 0.5^4 \cdot 0.5^2 = 15 \cdot 0.0625 \cdot 0.25 = 0.234375$. Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa **23.4%**.

Wahr Korrekt, dies ist eine der drei Bedingungen einer Bernoulli-Kette.

Falsch Falsch, der Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ kann auch eine Dezimalzahl sein (z.B. 3.5).

Falsch Falsch, Münzwürfe sind unabhängig; die Münze hat kein Gedächtnis (Wahrscheinlichkeit bleibt 0.5).

Aufgabe 5

Gegeben ist $n = 8$, $p = 0.05$, $q = 0.95$.

a) Gesucht ist $P(X = 2)$:

$$P(X = 2) = \binom{8}{2} \cdot 0.05^2 \cdot 0.95^6 = 28 \cdot 0.0025 \cdot 0.73509 \approx 0.0515$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa **5.15%**.

b) Gesucht ist $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$:

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} \cdot 0.05^0 \cdot 0.95^8 = 1 \cdot 1 \cdot 0.66342 = 0.66342$$

$$P(X = 1) = \binom{8}{1} \cdot 0.05^1 \cdot 0.95^7 = 8 \cdot 0.05 \cdot 0.69834 = 0.27934$$

$$P(X \leq 1) = 0.66342 + 0.27934 = 0.94276$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa **94.28%**.

Aufgabe 6

Gegeben: $n = 5$, $p = 0.25$, $q = 0.75$. Gesucht: $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$.

Für $k = 4$:

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0.25^4 \cdot 0.75^1 = 5 \cdot 0.00390625 \cdot 0.75 = 0.014648$$

Für $k = 5$:

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0.25^5 \cdot 0.75^0 = 1 \cdot 0.00097656 \cdot 1 = 0.00097656$$

Gesamtwahrscheinlichkeit:

$$P(X \geq 4) = 0.014648 + 0.00097656 \approx 0.0156$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa **1.56%**.