Geometrische Körper

Würfel, Quader, Kugel & Zylinder

Aufgabe 1:
Du hast einen Spielwürfel vor Dir. Jede Kantenlänge beträgt 2 cm. Bestimme, welche Eigenschaften dieser geometrische Körper hat.

Wie viele Flächen, Kanten und Ecken besitzt er?

Aufgabe 2:
Eine Getränkedose hat die Form eines Zylinders. Der Radius der kreisförmigen Grundfläche beträgt $r = 3\,\text{cm}$. Die Höhe der Dose ist $h = 12\,\text{cm}$. Bestimme die Eigenschaften dieses Körpers. Wie viele Flächen, Kanten und Ecken hat er?

Aufgabe 3:
Ein Aquarium hat die Form eines Quaders. Die Länge beträgt 50 cm, die Breite 30 cm und die Höhe 40 cm. Du möchtest das Aquarium zu drei Vierteln mit Wasser füllen. Zusätzlich stellst Du eine dekorative Kugel aus Keramik mit Radius $r = 5\,\text{cm}$ hinein. Wie viel Wasser (in Litern) benötigst Du insgesamt? Beachte: Die Kugel verdrängt Wasser.

Aufgabe 4:
Du arbeitest in einer Bäckerei. Der Chef möchte eine neue zylindrische Kuchenform kaufen. Die Form soll einen Durchmesser von 24 cm und eine Höhe von 8 cm haben. Gleichzeitig habt ihr eine rechteckige Backform (Quader) mit den Massen $30\,\text{cm} \times 20\,\text{cm} \times 8\,\text{cm}$. Welche Form fasst mehr Teig? Wie viel mehr (in Prozent)?

Aufgabe 5:
Ein Karton hat die Form eines Würfels. Jede Kante ist 15 cm lang. Wie viele Flächen, Kanten und Ecken hat dieser Würfel?

Aufgabe 6:
Eine Tischtennisball-Kugel hat einen Durchmesser von 4 cm. Wie gross ist der Radius dieser Kugel?

Aufgabe 7:
Ein Geschenkkarton ist ein Quader mit den Massen $40\,\text{cm} \times 25\,\text{cm} \times 15\,\text{cm}$. Berechne das Volumen dieses Kartons.

Aufgabe 8:
Eine Konservendose hat die Form eines Zylinders. Der Radius beträgt 4 cm und die Höhe 10 cm. Berechne das Volumen der Dose. (Nutze $\pi \approx 3{,}14$)

Aufgabe 9:
Ein Schwimmbad hat die Form eines Quaders mit den Massen $25\,\text{m} \times 12\,\text{m} \times 2\,\text{m}$. Wie viele Liter Wasser passen in das Becken, wenn es komplett gefüllt ist? (Tipp: $1\,\text{m}^3 = 1000\,\text{Liter}$)

Aufgabe 10:
Eine Eiskugel hat einen Radius von 3 cm. Berechne das Volumen dieser Kugel. Verwende die Formel $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und $\pi \approx 3{,}14$.

Aufgabe 11:
Ein Hersteller produziert zwei Verpackungen: Eine würfelförmige Schachtel mit Kantenlänge 20 cm und eine quaderförmige Schachtel mit den Massen 25 cm × 16 cm × 20 cm. Welche Verpackung fasst mehr? Wie viel mehr (in cm^3)?

Aufgabe 12:
Ein Zylinder und eine Kugel haben denselben Radius $r = 6\,\text{cm}$. Der Zylinder hat eine Höhe von $h = 8\,\text{cm}$. Berechne beide Volumina und bestimme, welcher Körper mehr Raum einnimmt. Um wie viel Prozent unterscheiden sich die Volumina?

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1:
Wir untersuchen den Spielwürfel systematisch.

Schritt 1: Wir betrachten die Form. Der Spielwürfel hat nur flache Flächen und rechte Winkel.

Schritt 2: Wir zählen die Flächen. Der Würfel hat 6 Flächen: oben, unten, vorne, hinten, links, rechts.

Schritt 3: Jede Fläche ist ein Quadrat mit Seitenlänge $a = 2\,\text{cm}$. Alle Flächen sind gleich gross.

Schritt 4: Der Würfel ist perfekt symmetrisch. Jede Kante hat dieselbe Länge.

Schritt 5: Wir zählen die Kanten und Ecken:

- **Kanten:** 12 Stück (4 oben, 4 unten, 4 verbindende Kanten)
- **Ecken:** 8 Stück (4 oben, 4 unten)

Schritt 6: Dieser Körper ist ein **Würfel**.

Zusätzlich können wir die Oberfläche berechnen:

$$\begin{aligned} O &= 6 \cdot a^2 \\ &= 6 \cdot (2\,\text{cm})^2 \\ &= 6 \cdot 4\,\text{cm}^2 \\ &= 24\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Die Oberfläche beträgt $24\,\text{cm}^2$.

Lösung zu Aufgabe 2:
Wir analysieren die Getränkedose.

Schritt 1: Die Dose hat eine gekrümmte Mantelfläche und zwei flache Deckflächen.

Schritt 2: Der Zylinder hat insgesamt 3 Flächen:

- 1 gekrümmte Mantelfläche
- 2 kreisförmige Grundflächen (oben und unten)

Schritt 3: Die Grundfläche ist ein Kreis mit Radius $r = 3\,\text{cm}$.

Schritt 4: Der Zylinder ist rotationssymmetrisch um seine Mittelachse.

Schritt 5: Der Zylinder hat besondere Eigenschaften:

- **Kanten:** 2 kreisförmige Kanten (Übergänge zwischen Mantel und Grundflächen)
- **Ecken:** 0 Stück (Kreise haben keine Ecken)

Schritt 6: Dieser Körper ist ein **Zylinder**.

Das Volumen berechnen wir:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot r^2 \cdot h \\ &= \pi \cdot (3\,\text{cm})^2 \cdot 12\,\text{cm} \\ &= \pi \cdot 9\,\text{cm}^2 \cdot 12\,\text{cm} \\ &= 108\pi\,\text{cm}^3 \\ &\approx 339{,}3\,\text{cm}^3 \end{aligned}$$

Das Volumen beträgt etwa $339{,}3\,\text{cm}^3$.

Lösung zu Aufgabe 3:
Wir lösen die Aufgabe in mehreren Schritten.

Schritt 1: Volumen des Quaders berechnen

Das Gesamtvolumen des Aquariums ist:

$$\begin{aligned} V_{\text{Quader}} &= a \cdot b \cdot c \\ &= 50\,\text{cm} \cdot 30\,\text{cm} \cdot 40\,\text{cm} \\ &= 60\,000\,\text{cm}^3 \end{aligned}$$

Schritt 2: Drei Viertel des Volumens

Du füllst nur drei Viertel des Aquariums:

$$\begin{aligned} V_{\text{Füllung}} &= \frac{3}{4} \cdot V_{\text{Quader}} \\ &= \frac{3}{4} \cdot 60\,000\,\text{cm}^3 \\ &= 45\,000\,\text{cm}^3 \end{aligned}$$

Schritt 3: Volumen der Kugel berechnen

Die Kugel verdrängt Wasser. Ihr Volumen ist:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{Kugel}} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi \cdot (5\,\text{cm})^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi \cdot 125\,\text{cm}^3 \\
&= \frac{500}{3}\pi\,\text{cm}^3 \\
&\approx 523{,}6\,\text{cm}^3
\end{aligned}
$$

Schritt 4: Benötigtes Wasservolumen

Das Wasser muss die Kugel berücksichtigen:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{Wasser}} &= V_{\text{Füllung}} - V_{\text{Kugel}} \\
&= 45\,000\,\text{cm}^3 - 523{,}6\,\text{cm}^3 \\
&= 44\,476{,}4\,\text{cm}^3
\end{aligned}
$$

Schritt 5: Umrechnung in Liter

Wir wissen: $1\,\text{Liter} = 1000\,\text{cm}^3$. Also:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{Wasser}} &= \frac{44\,476{,}4\,\text{cm}^3}{1000} \\
&\approx 44{,}48\,\text{Liter}
\end{aligned}
$$

Du benötigst etwa 44,5 Liter Wasser.

Lösung zu Aufgabe 4:
Wir vergleichen die Volumina beider Formen.

Schritt 1: Volumen der zylindrischen Form

Der Durchmesser ist $d = 24\,\text{cm}$. Der Radius ist:

$$
r = \frac{d}{2} = \frac{24\,\text{cm}}{2} = 12\,\text{cm}
$$

Das Volumen des Zylinders berechnen wir:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{Zylinder}} &= \pi r^2 h \\
&= \pi \cdot (12\,\text{cm})^2 \cdot 8\,\text{cm} \\
&= \pi \cdot 144\,\text{cm}^2 \cdot 8\,\text{cm} \\
&= 1152\pi\,\text{cm}^3 \\
&\approx 3619{,}1\,\text{cm}^3
\end{aligned}
$$

Schritt 2: Volumen der rechteckigen Form

Das Volumen des Quaders ist:

$$\begin{aligned} V_{\text{Quader}} &= a \cdot b \cdot c \\ &= 30\,\text{cm} \cdot 20\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} \\ &= 4800\,\text{cm}^3 \end{aligned}$$

Schritt 3: Vergleich der Volumina

Die rechteckige Form fasst mehr:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_{\text{Quader}} - V_{\text{Zylinder}} \\ &= 4800\,\text{cm}^3 - 3619{,}1\,\text{cm}^3 \\ &= 1180{,}9\,\text{cm}^3 \end{aligned}$$

Schritt 4: Prozentuale Differenz

Wie viel mehr fasst die rechteckige Form im Vergleich zur zylindrischen?

$$\begin{aligned} \text{Prozent} &= \frac{\Delta V}{V_{\text{Zylinder}}} \cdot 100\% \\ &= \frac{1180{,}9\,\text{cm}^3}{3619{,}1\,\text{cm}^3} \cdot 100\% \\ &\approx 32{,}6\% \end{aligned}$$

Die rechteckige Form fasst etwa 32,6% mehr Teig als die zylindrische Form.

Lösung zu Aufgabe 5:
Ein Würfel hat immer dieselbe Anzahl an Flächen, Kanten und Ecken, unabhängig von der Kantenlänge.

- **Flächen:** 6 (oben, unten, vorne, hinten, links, rechts)
- **Kanten:** 12 (4 oben, 4 unten, 4 verbindende)
- **Ecken:** 8 (4 oben, 4 unten)

Die Kantenlänge von 15 cm ändert nichts an diesen Zahlen.

Lösung zu Aufgabe 6:
Der Durchmesser ist $d = 4\,\text{cm}$. Der Radius ist die Hälfte des Durchmessers:

$$\begin{aligned} r &= \frac{d}{2} \\ &= \frac{4\,\text{cm}}{2} \\ &= 2\,\text{cm} \end{aligned}$$

Der Radius der Tischtennisball-Kugel beträgt 2 cm.

Lösung zu Aufgabe 7:
Das Volumen eines Quaders berechnest Du mit $V = a \cdot b \cdot c$:

$$\begin{aligned} V &= 40\,\text{cm} \cdot 25\,\text{cm} \cdot 15\,\text{cm} \\ &= 1000\,\text{cm}^2 \cdot 15\,\text{cm} \\ &= 15\,000\,\text{cm}^3 \end{aligned}$$

Der Geschenkkarton fasst $15\,000\,\text{cm}^3$ oder $15\,\text{dm}^3$ oder 15 Liter.

Lösung zu Aufgabe 8:
Das Volumen eines Zylinders ist $V = \pi r^2 h$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot (4\,\text{cm})^2 \cdot 10\,\text{cm} \\ &= \pi \cdot 16\,\text{cm}^2 \cdot 10\,\text{cm} \\ &= 160\pi\,\text{cm}^3 \\ &\approx 160 \cdot 3{,}14\,\text{cm}^3 \\ &\approx 502{,}4\,\text{cm}^3 \end{aligned}$$

Die Konservendose hat ein Volumen von etwa $502{,}4\,\text{cm}^3$.

Lösung zu Aufgabe 9:
Zuerst berechnen wir das Volumen des Beckens:

$$\begin{aligned} V &= 25\,\text{m} \cdot 12\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} \\ &= 300\,\text{m}^2 \cdot 2\,\text{m} \\ &= 600\,\text{m}^3 \end{aligned}$$

Nun rechnen wir in Liter um. Es gilt $1\,\text{m}^3 = 1000$ Liter:

$$\begin{aligned} V &= 600\,\text{m}^3 \cdot 1000 \\ &= 600\,000\,\text{Liter} \end{aligned}$$

Das Schwimmbad fasst 600 000 Liter Wasser.

Lösung zu Aufgabe 10:

Das Volumen einer Kugel berechnen wir mit $V = \frac{4}{3}\pi r^3$:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\pi \cdot (3\,\mathrm{cm})^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi \cdot 27\,\mathrm{cm}^3 \\
&= \frac{108}{3}\pi\,\mathrm{cm}^3 \\
&= 36\pi\,\mathrm{cm}^3 \\
&\approx 36 \cdot 3{,}14\,\mathrm{cm}^3 \\
&\approx 113{,}04\,\mathrm{cm}^3
\end{aligned}$$

Die Eiskugel hat ein Volumen von etwa $113\,\mathrm{cm}^3$.

Lösung zu Aufgabe 11:
Volumen der würfelförmigen Schachtel:

$$\begin{aligned}
V_{\text{Würfel}} &= a^3 \\
&= (20\,\mathrm{cm})^3 \\
&= 8000\,\mathrm{cm}^3
\end{aligned}$$

Volumen der quaderförmigen Schachtel:

$$\begin{aligned}
V_{\text{Quader}} &= 25\,\mathrm{cm} \cdot 16\,\mathrm{cm} \cdot 20\,\mathrm{cm} \\
&= 400\,\mathrm{cm}^2 \cdot 20\,\mathrm{cm} \\
&= 8000\,\mathrm{cm}^3
\end{aligned}$$

Beide Verpackungen fassen genau gleich viel: $8000\,\mathrm{cm}^3$. Die Differenz beträgt $0\,\mathrm{cm}^3$.

Lösung zu Aufgabe 12:
Volumen des Zylinders:

$$\begin{aligned}
V_{\text{Zylinder}} &= \pi r^2 h \\
&= \pi \cdot (6\,\mathrm{cm})^2 \cdot 8\,\mathrm{cm} \\
&= \pi \cdot 36\,\mathrm{cm}^2 \cdot 8\,\mathrm{cm} \\
&= 288\pi\,\mathrm{cm}^3 \\
&\approx 904{,}3\,\mathrm{cm}^3
\end{aligned}$$

Volumen der Kugel:

$$\begin{aligned} V_{\text{Kugel}} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot (6\,\text{cm})^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot 216\,\text{cm}^3 \\ &= \frac{864}{3}\pi\,\text{cm}^3 \\ &= 288\pi\,\text{cm}^3 \\ &\approx 904{,}3\,\text{cm}^3 \end{aligned}$$

Überraschend: Beide Körper haben exakt dasselbe Volumen von $288\pi\,\text{cm}^3$. Die prozentuale Differenz beträgt 0%.